

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции серии выпусков «Справочной математической библиотеки»	11
Предисловие	16

Глава I

Числовая прямая и функции на ней

§ 1. Действительные числа и числовая прямая	19
1. Действительные числа	19
2. Числовая прямая	19
3. p -ичные системы	20
4. Множества действительных чисел	22
5. Ограниченные множества, верхняя и нижняя границы	24
6. Теория иррациональных чисел	25
§ 2. Функции. Последовательности	28
1. Функции одного переменного	28
2. Верхняя и нижняя границы функции	29
3. Четные и нечетные функции	31
4. Обратные функции	32
5. Периодические функции	32
6. Функциональные уравнения	33
7. Последовательности чисел	34
8. Верхняя и нижняя границы последовательности	35
9. Наибольший член последовательности	35
10. Монотонные последовательности	36
11. Двойные последовательности	37
§ 3. Предельный переход	38
1. Предельная точка множества	38
2. Предельная точка и предел последовательности	39
3. Основные теоремы о пределах	41
4. Некоторые предложения о пределах	41
5. Верхний и нижний пределы последовательности	42
6. Равномерно распределенные последовательности	43
7. Рекуррентные последовательности	44
8. Символы $o(x_n)$ и $O(x_n)$	45
9. Предел функции	46
10. Непрерывность функции справа и слева	47
11. Непрерывные функции. Разрывные функции	48
12. Последовательности функций	48
13. Равномерная сходимость функций	50

14. Сходимость в среднем	51
15. Символы $o(x)$ и $O(x)$	52
16. Монотонные функции	53
17. Выпуклые функции	53

Глава II

n -мерные пространства и функции в них

Введение	56
§ 1. n -мерные пространства	57
1. n -мерное координатное пространство	57
2. n -мерное векторное пространство	58
3. Скалярное произведение	59
4. Линейная система и ее базисы	60
5. Линейные функции	63
6. Линейная оболочка	66
7. Ортогональные системы векторов	67
8. Биортогональные системы векторов	68
9. Проекция вектора на многообразие	69
§ 2. Предельный переход, непрерывные функции и операторы	71
1. Предельный переход в n -мерном пространстве	71
2. Ряды векторов	73
3. Непрерывные функции n переменных	75
4. Периодические функции n переменных	80
5. Предельный переход для линейных оболочек	82
6. Операторы из E_n в E_m	84
7. Итерационные последовательности	86
8. Принцип сжатых отображений	88
§ 3. Выпуклые тела в n -мерном пространстве	90
1. Основные определения	90
2. Выпуклые функции	92
3. Выпуклые тела и нормы векторов	93
4. Опорные гиперплоскости	94
5. Опорные функции и сопряженные пространства	95
6. Основные теоремы об опорных гиперплоскостях	97
7. Связь между взаимными выпуклыми телами	98
8. Конус. Касательный конус	99
9. Теорема Хелли	101
10. Линейные операции над множествами	101

Глава III

Ряды

Введение	104
§ 1. Числовые ряды	109
1. Знакопостоянные и знакопеременные ряды	109
2. Свойства сходящихся рядов	110
3. Общие признаки сходимости знакоположительных рядов	110
4. Оценки остаточных членов, соответствующие различным признакам сходимости	112

5. Частные признаки сходимости знакоположительных рядов. Оценки остаточных членов	114
6. Сходимость знакопеременных рядов	123
7. Бесконечные произведения и их сходимость	125
8. Двойные ряды. Основные понятия и определения	130
9. Некоторые свойства двойных рядов	131
10. Некоторые признаки сходимости двойных знакоположительных рядов. Оценки остаточных членов	133
§ 2. Функциональные ряды	138
1. Основные свойства и признаки сходимости	138
2. Степенные ряды	141
3. Действия над степенными рядами. Ряд Тейлора	143
4. Комплексные ряды	149
5. Тригонометрические ряды Фурье	152
6. Асимптотические ряды	161
7. Некоторые способы обобщенного суммирования расходящихся рядов	164
§ 3. Методы вычисления рядов	168
1. Элементарные приемы точного суммирования	168
2. Суммирование рядов с помощью функций комплексного переменного	170
3. Суммирование рядов с помощью преобразования Лапласа	172
4. Интегральные оценки для конечных сумм и бесконечных рядов	176
5. Преобразование Куммера	180
6. Улучшение сходимости рядов, соответствующее данному признаку сходимости	180
7. Преобразование Абеля	185
8. Способ А. Н. Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов	187
9. Способ А. С. Малиева улучшения сходимости тригонометрических рядов	191

Глава IV

Ортогональные ряды и ортогональные системы

Введение	194
§ 1. Ортогональные системы	196
1. Ортогональные системы функций, определенных в n точках	196
2. Ортогональные системы в $E_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$	196
3. Наилучшее квадратическое приближение	197
4. Ортогональные системы тригонометрических функций	198
§ 2. Общие свойства ортогональных и биортогональных систем	200
1. Ортогональность. Скалярное (внутреннее) произведение	200
2. Ортогональные системы функций Бесселя, Хаара и др.	204

3. Линейная независимость. Процесс ортогонализации	210
4. Коэффициенты Фурье. Замкнутость системы	214
5. Ряды Фурье по тригонометрической системе	217
6. Биортогональные системы функций	219
§ 3. Ортогональные системы многочленов	223
1. Нули ортогональных многочленов	224
2. Рекуррентные соотношения для ортогональных многочленов	225
3. Степенные моменты. Выражение ортогональных многочленов через степенные моменты	226
4. Связь ортогональных многочленов с цепными дробями	227
5. Обращение ортогональных разложений в последовательность аппроксимирующих дробей	230
6. Ортогональные многочлены и квадратурные формулы гауссовского типа	232
7. Замкнутость ортогональной системы многочленов	233
8. Формула Кристоффеля. Сходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам	233
§ 4. Классические системы ортогональных многочленов	235
1. Дифференциальное уравнение Пирсона	235
2. Дифференциальное уравнение для соответствующих классов ортогональных многочленов	237
3. Выражение через вес многочлена n -й степени из ортогональной системы многочленов	238
4. Производящая функция ортогональной системы многочленов с весом Пирсона	238
5. Многочлены Лежандра	239
6. Многочлены Якоби	245
7. Многочлены Чебышева первого рода	249
8. Многочлены Чебышева второго рода	255
9. Многочлены Лагерра	259
10. Многочлены Эрмита	261
11. Многочлены Чебышева, ортогональные на конечной системе точек	263

Глава V

Цепные дроби

Введение	266
§ 1. Цепные дроби и их основные свойства	267
1. Вычисление подходящих дробей	267
2. Преобразования цепных дробей	269
3. Сжатие и растяжение цепных дробей	270
4. Преобразование цепных дробей, вытекающее из теоремы Штольца	272
5. Свойства правильных цепных дробей	276
6. Равноценные и соответствующие цепные дроби	280
7. Построение соответствующих дробей. Метод Висковатова	282
8. Метод Аппеля	284

§ 2. Основные признаки сходимости цепных дробей	285
1. Сходимость цепных дробей	285
2. Необходимый и достаточный признак сходимости цепной дроби с положительными членами звеньев (признак Зейделя)	288
3. Достаточные признаки сходимости цепных дробей с положительными членами звеньев	289
4. Первая серия достаточных признаков сходимости	290
5. Признаки сходимости предельно-периодических цепных дробей	293
§ 3. Разложение некоторых функций в цепные дроби	294
1. Метод Лагранжа	294
2. Основное дифференциальное уравнение	294
3. Разложение степенной функции в цепную дробь	295
4. Разложение логарифмической функции в цепную дробь	297
5. Разложение показательной функции в цепную дробь	297
6. Разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$ в цепную дробь	298
7. Разложение функции $y = \int_0^x \frac{dt}{1+t^k}$ в цепную дробь	299
8. Разложение для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{th} x$ в цепную дробь	300
9. Разложение функции Прима в цепную дробь	301
10. Разложение неполной гамма-функции в цепную дробь	302
11. Формула Тиле	303
12. Дробно-рациональные приближения для $\sin x$ и $\operatorname{sh} x$	304
13. Дробно-рациональные приближения для $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$	305
14. Дробно-рациональное приближение для интеграла вероятности	306
15. Обращение ряда Стирлинга в цепную дробь	306
16. Дробно-рациональное приближение для гамма-функции	307
17. Дробно-рациональное приближение для логарифма гамма-функции	307
18. Дробно-рациональное приближение для производной логарифма гамма-функции	308
19. Формула Обрешкова	309
§ 4. Метод матриц	311
1. Извлечение квадратного корня с помощью матриц второго порядка	311
2. Решение квадратных уравнений с помощью матриц второго порядка	313
3. Связь метода матриц с теорией цепных дробей	315
4. Разложение квадратических иррациональностей в непериодические цепные дроби при помощи матриц второго порядка с переменными элементами	317
5. Извлечение корня любой рациональной степени с помощью матриц	318

6. Решение уравнений третьей степени с помощью матриц	320
7. Возвратные ряды. Метод Бернулли — Эйлера	322
8. Связь между методом Бернулли — Эйлера и методом матриц	323
9. Решение уравнений высших степеней с помощью матриц	325
10. Понятие об алгоритме Якоби	326

Глава VI

Некоторые системы чисел и функций

§ 1. Некоторые константы и системы чисел	329
1. Константы	329
2. Некоторые системы чисел	340
§ 2. Числа и многочлены Бернулли и Эйлера	348
1. Числа и многочлены Бернулли	348
2. Числа и многочлены Эйлера	359
§ 3. Простейшие кусочно-линейные функции и дельтаобразные функции	364
1. Кусочно-линейные функции	364
2. δ (дельта)-функция	371
§ 4. Простейшие специальные функции	374
1. Эллиптические интегралы	374
2. Интегральные функции	379
3. Интеграл вероятности	384
4. Интегралы Френеля	387
5. Гамма- и бета-функции Эйлера	390
6. Функции Бесселя	406
Библиография	416
Указатель обозначений	421
Алфавитный указатель	424